


Тема: Вычисление вероятностей по теоремам Муавра- Лапласа, теореме Пуассона.

Цель работы: Нахождение вероятностей событий, применяя теоремы Муавра- Лапласа, Пуассона.

Необходимый теоретический материал:

Теорема 1 (Пуассона). Если число испытаний неограниченно увеличивается и вероятность p наступления события A в каждом испытании неограниченно уменьшается таким образом, что $np = a = const$, то вероятность m успехов при n испытаниях удовлетворяет предельному равенству:


При больших n и малых p приближенно вычисляют по формуле Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$$



Симеон-Дени Пуассон (фр. *Siméon-Denis Poisson*; 21 июня 1781, Пуатье, Франция — 25 апреля 1842, Париж)

Замечание. На практике эту формулу применяют при $n > 50$, $np < 10$

Локальная теорема Муавра-Лапласа



Абрахам де Муавр (*Abraham de Moivre*; 26 мая 1667, Витри-ле-Франсуа — 27 ноября 1754, Лондон) — английский математик,



с (фр. *Pierre-Simon Laplace*; 23 марта 1749 — 5 марта 1827) — французский математик

Теорема 2. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность можно вычислять по приближённой формуле:

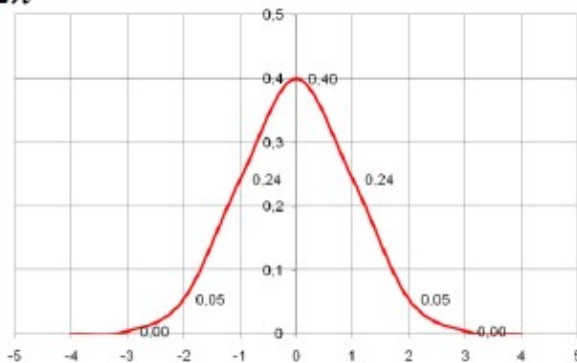
$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ где } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

(тем точнее, чем больше n)

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

Значения $\varphi(x)$ берут из таблиц (см. далее пример)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x) \quad \text{- функция Гаусса}$$



Карл Фридрих Гаусс (нем. *Johann Carl Friedrich Gauß*; 30 апреля 1777, Брауншвейг — 23 февраля 1855, Гёттинген)

1. Чётная.
2. При $x \geq 4$ можно считать равной 0.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Теорема 3. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность

$P_n(k_1 \leq m \leq k_2)$ (число успехов из указанного интервала)

может быть найдена по приближённой формуле:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$$

$$P_n(k_1 \leq m \leq k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где

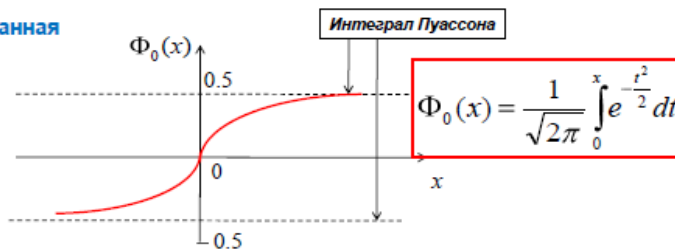
$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$P_n(k_1 \leq m \leq k_2) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx,$$

где

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Нормированная
функция
Лапласа:



$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

1. Нечётная: $\Phi_0(x) = -\Phi_0(-x)$

2. При $x > 5$ можно считать равной 0.5

Функция
Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\Phi(x) = 0.5 + \Phi_0(x)$$

Задания:

Вариант-1

№1. Телефонная станция обслуживает 2000 абонентов. Вероятность того, что какой-то абонент позвонит в течение часа равна 0,003. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

№2. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка 0,7. Какова вероятность попадания 160 раз при 200 выстрелах?

№3. Цех в среднем выпускает 96% продукции высшего сорта. При приемке продукции проверяют 200 изделий. Если среди них > 10 штук не высшего сорта, то партия бракуется и возвращается в цех. Какова вероятность того, что партия будет принята?

№4. Пусть вероятность того, что взятое наудачу из кучи зерно окажется всхожим, равна 0,9. Какова вероятность того, что из 7 отобранных зерен ровно 5 окажется всхожими?

Вариант-2

№1 По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое четвертое малое предприятие имеет нарушение финансовой дисциплины. Найдите вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушение финансовой дисциплины: а) 220 предприятий; б) не менее 220; в) от 220 до 280.

№2. Вероятность получения с конвейера изделия первого сорта равна 0,9. Определите вероятность того, что из взятых на проверку 600 изделий 530 будут первого сорта.

Контрольные вопросы.

Сформулируйте теорему Бернулли, Пуассона, Муавра-Лапласа.

Форма отчета: ответы на вопросы по ходу решения задач.